

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE  
CURSO DE ENGENHARIA AUTOMOTIVA

ADRIANO INÁCIO BERTOLDI

RECONSTRUÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE AUTOMÓVEIS POR ODOMETRIA

Joinville

2018

ADRIANO INÁCIO BERTOLDI

## RECONSTRUÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE AUTOMÓVEIS POR ODOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Engenharia Automotiva, da Universidade Federal de Santa Catarina, Centro Tecnológico de Joinville como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel.

Orientador: Prof. Dr. Maurício de Campos Porath

Coorientador: Prof. Me. James Schipmann Eger

Joinville

2018

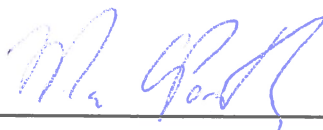
# RECONSTRUÇÃO DE TRAJETÓRIAS DE AUTOMÓVEIS POR ODOMETRIA

ADRIANO INÁCIO BERTOLDI

Esta Monografia foi julgada e aprovada como requisito parcial para obtenção do título de bacharel em Engenharia Automotiva na Universidade Federal de Santa Catarina, Campus de Joinville.

Joinville (SC), 06 de Julho de 2018.

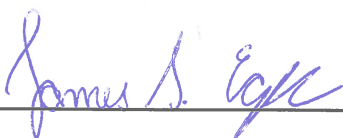
Banca Examinadora:



---

Dr. Maurício de Campos Porath

Orientador



---

Me. James Schipmann Eger

Membro



---

Dr. Antônio Otaviano Dourado

Membro

Agradeço aos meus pais pelo apoio em todas as horas.  
Agradeço a Francielle, meu amor, pela parceria e compreensão.  
Agradeço aos meus orientadores pelo suporte e disponibilidade.

## RESUMO

Os automóveis têm se tornado cada vez mais sofisticados e inteligentes. Técnicas de navegação auxiliam condutores e usuários de automóveis todos os dias, sendo a navegação por satélite o exemplo mais popular. Entretanto, existem ocasiões onde o sinal do satélite não está disponível. Por isso, faz-se necessário estudar alternativas que supram a falta do sinal de satélite para que a navegação não seja comprometida. O objetivo geral deste estudo é propor um método para reconstrução de trajetória de automóveis por odometria. Para tal, desenvolveu-se um modelo matemático baseado na diferença de rotação de cada roda traseira. Para validação dos resultados, realizou-se um experimento prático e uma simulação computacional. Os resultados da simulação foram positivos, demonstrando que o modelo matemático, em primeira análise, possibilitou a reconstrução da trajetória. O experimento apresentou trajetórias diferente do real, ocasionada por limitações do modelo experimental.

**Palavras-chave:** Reconstrução. Trajetória. Odometria. Simulação. Experimento.

## ABSTRACT

The automobiles are becoming more sophisticated and intelligent. Navigation techniques help drivers and users every day, where Satellite navigation is the most popular example. However, there are occasions where satellite signal is not available. That makes necessary the study of alternatives to suppress satellite signal outage, so the navigation will not be compromised. The general objective of this study is to propose a method to reconstruct the trajectory of automobile with odometry. To do this, a mathematical model is developed based on rear wheels difference of rotation. To validate the study, a practical experiment and computational simulation are done. The results of simulation are positive, indicating that mathematical model allowed the reconstruction, at first glance. The experiment presented different trajectories than real, caused by experimental model limitations.

**Key-words:** Reconstruction. Trajectory. Odometry. Simulation. Experiment.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de trilateração.....	13
Figura 2 – Representação do modelo matemático.....	19
Figura 3 – Ilustração da simulação.....	25
Figura 4 – Resultado da simulação. ....	26
Figura 5 – Roda traseira com instrumentação posicionada. ....	28
Figura 6 – Demarcação do piso e realização do experimento.....	29
Figura 7 – Medição para obtenção da trajetória real. ....	30
Figura 8 – Trajetórias obtidas com o experimento. ....	33

## LISTA DE SIGLAS

ABS	<i>Antilock Braking System</i>
CAD	<i>Computer Aided Design</i>
DR	<i>DeadReckoning</i>
GPS	Sistema de Posicionamento Global ( <i>Global Positioning System</i> )
WLAN	Rede Local Sem Fios ( <i>Wireless Local Area Network</i> )
RF	Rádio Frequência
UFSC	Universidade Federal de Santa Catarina
USB	<i>Universal Serial Bus</i>



## SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO .....	9
1.1 OBJETIVOS .....	10
1.1.1 OBJETIVO GERAL .....	10
1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	10
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	11
2.1 TÉCNICAS QUE USAM MEDIÇÕES ABSOLUTAS .....	11
2.1.1 BÚSSOLA ELETRÔNICA .....	11
2.1.2 <i>ACTIVE BEACONS</i> .....	11
2.1.3 GPS .....	12
2.1.4 POSIÇÃO POR PONTOS DE REFERÊNCIAS .....	13
2.1.5 POSICIONAMENTO BASEADO EM MAPAS .....	14
2.2 TÉCNICAS QUE USAM MEDIÇÕES RELATIVAS .....	14
2.2.1 NAVEGAÇÃO INERCIAL.....	14
2.2.2 ODOMETRIA .....	15
2.3 RESUMO DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	16
3 MODELO MATEMÁTICO .....	18
4 SIMULAÇÃO .....	24
4.1 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO.....	26
5 EXPERIMENTO .....	27
5.1 RESULTADO DO EXPERIMENTO.....	32
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	34
REFERÊNCIAS.....	35
APÊNDICE A – Código de leitura com intervalo. ....	36
APÊNDICE B – Código de leitura sem repetição. ....	37
APÊNDICE C – Algoritmo do modelo matemático. ....	38

## 1 INTRODUÇÃO

Com o advento das tecnologias embarcadas, os automóveis têm se tornado cada vez mais inteligentes e sofisticados. O que no passado era efetuado através de mapas impressos e localização via referenciais, hoje pode ser facilmente realizado pela central multimídia do automóvel. O usuário apenas inclui a coordenada de destino na central e a mesma apresentará a rota e o guiará de trecho a trecho. Caso o automóvel não possua uma central multimídia com navegação, existe a possibilidade de se utilizar um smartphone ou navegador portátil para tal tarefa, funcionando com o mesmo princípio.

O posicionamento de automóveis tem grande importância atualmente, seja por segurança, comodidade do usuário e monitoramento de frota. Pensando em aplicações autônomas, a localização espacial é ainda mais importante, pois não existe o reconhecimento e controle do condutor.

Noureldin, Karamat e Georgy (2012), mostram que existem duas categorias para encontrar o posicionamento de automóveis. A primeira é caracterizada pela fixação de posição (Medições Absolutas), onde fontes externas ao veículo, com posicionamento conhecido, são utilizadas como referências. A segunda categoria, do inglês *Dead-Reckoning* (DR) ou Medições Relativas, é um sistema autônomo que estima o posicionamento conforme o deslocamento do veículo a partir de uma localização inicial.

Atualmente, a tecnologia de medição absoluta mais famosa para posicionamento terrestre é a *Global Positioning System* (GPS). Este sistema oferece ao usuário uma rádio localização que permite a leitura de coordenadas sob qualquer velocidade, em qualquer lugar do mundo e independente das condições climáticas (GONÇALVES E BORGES, 2016). O GPS costuma funcionar bem normalmente, entretanto, existem ocasiões onde pode falhar por falta de sinal. Em ambientes fechados, como em garagens de prédios, túneis, subsolos ou em espaços abertos encobertos por grandes estruturas (prédios) o sinal do GPS pode falhar e assim, o posicionamento ficar totalmente comprometido (GROVES, 2008).

Em relação a medições absolutas, a odometria e a navegação inercial são dois dos principais exemplos. A navegação inercial utiliza os sinais de medição dos giroscópios e acelerômetros para estimativa de posicionamento ao longo de um trajeto (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012). Odômetros medem a rotação

das rodas de veículos, resultando em velocidade e distância trafegada. Tradicionalmente, os odômetros são aplicados nas caixas de transmissão dos automóveis. Em veículos modernos, cada roda possui esse sensor, que também é conhecido como sensor de velocidade da roda ou sensor de rotação do ABS (*Antilock Braking System*). O posicionamento através de odometria pode ser realizado em um processo chamado de odometria diferencial. Nesse método, a diferença de medição entre as rodas esquerda e direita estimam o ângulo de guinada do automóvel. Em conjunto com o deslocamento do veículo, pode-se obter a trajetória do mesmo (GROVES, 2008).

Considerando a odometria como ferramenta de posicionamento, este trabalho é direcionado ao seguinte problema: como reconstruir a trajetória com base na diferença de rotação das rodas traseiras?

## 1.1 OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho foram subdivididos em dois itens, objetivo geral e objetivos específicos, apresentados a seguir.

### 1.1.1 OBJETIVO GERAL

Propor um método para reconstrução de trajetória de automóveis por odometria.

### 1.1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Revisar bibliograficamente os sistemas de navegação existentes;
- Elaborar modelo matemático do método;
- Simular computacionalmente o uso deste método;
- Realizar experimento.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As técnicas de posicionamento de automóveis podem ser subdivididas em dois grupos, de acordo com o princípio de medição usado. As medições absolutas são realizadas baseadas em referências externas com posição conhecida. As medições relativas podem ser realizadas por equipamentos aplicados ao veículo. Esse tipo de medição acontece ao longo do trajeto do automóvel, onde se estima o posicionamento a partir de um determinado ponto de partida.

### 2.1 TÉCNICAS QUE USAM MEDIÇÕES ABSOLUTAS

Entre as técnicas de medições absolutas são destacados bússola eletrônica, *active beacons*, GPS, posição por pontos de referências e posicionamento baseado em mapas.

#### 2.1.1 BÚSSOLA ELETRÔNICA

Este método utiliza magnetômetros para disponibilizar medições referentes ao norte magnético da terra, através do campo magnético local. Ele não é capaz de mostrar a localização completa sem o uso de ferramentas auxiliares. Como o sensor tende a localizar o norte magnético, deve-se aplicar uma correção para encontrar o norte geográfico da terra. Como desvantagem, o sensor pode detectar distorções no campo magnético, decorrentes de subestações de energia elétrica ou regiões com alta densidade de metais. Isso pode acarretar erros imprevisíveis, dependendo da localização (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

#### 2.1.2 ACTIVE BEACONS

Este tipo de técnica realiza o posicionamento através de referências com posições conhecidas. Em geral, o uso é aplicado a ambientes conhecidos ou controlados, tais como parques, estacionamentos, prédios e laboratórios. Faz-se necessário que as referências (*beacons*) estejam montadas em posições precisas e estratégicas. Porém, isso pode tornar o custo de implementação mais alto e pouco versátil. Este método suporta diferentes algoritmos de posicionamento, tendo como

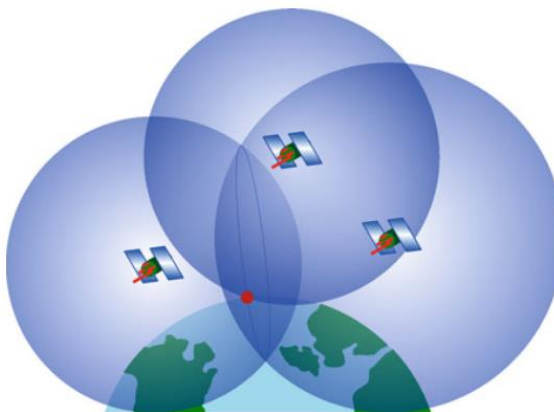
base as distâncias ou ângulos formados entre as referências e o veículo (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

A trilateração e a triangulação são duas vertentes dessa técnica. A trilateração é a determinação da posição do veículo baseada na distância entre o mesmo e as referências conhecidas. Usualmente, utilizam-se três ou mais fontes de referência montadas em localizações conhecidas do ambiente. Adicionalmente, é necessário que o veículo possua um receptor a bordo dos sinais de WLAN, por exemplo. Através da informação de tempo de operação do veículo, o sistema consegue estimar a distância entre os transmissores estacionários e o receptor presente no veículo. A triangulação é uma técnica similar, porém leva em consideração os ângulos formados entre a frente do veículo e os receptores (*beacons*) dispostos no espaço (BORENSTEIN et al., 1997). Noureldin, Karamat e Georgy (2012) citam outras redes sem fio como exemplos de sinais usados nesse método, como redes de celular ou de televisão.

### 2.1.3 GPS

Este é o sistema de posicionamento mais popular para ambientes externos. Seu funcionamento se dá pelos sinais de rádio frequência (RF) emitidos por satélites que orbitam a terra. Os receptores na superfície da terra conseguem calcular sua posição utilizando o diferencial do tempo entre a emissão e chegada do sinal (estimativa de distância por multilateração). Com isso, é possível obter a latitude, longitude e altitude do receptor assim que a distância entre o mesmo e alguns satélites for conhecida. Três satélites seriam o limite mínimo teórico, entretanto, necessita-se de mais um para correção do relógio do receptor. O funcionamento do sistema é bom para ambientes externos e que possuam boa cobertura dos satélites. Para ambientes internos, normalmente não está disponível pelo alcance dos sinais RF (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012). A Figura 1 apresenta um exemplo de trilateração.

Figura 1 – Exemplo de trilateração.



Fonte: Noureldin, Karamat e Georgy (2012, p.7).

Na Figura 1, os círculos azuis representam o alcance do sinal de cada satélite. A localização do ponto vermelho só ocorre quando há a intersecção dos sinais de no mínimo 3 satélites (teórico). O GPS utiliza multilateração, ou seja, sinais de no mínimo 4 satélites simultaneamente.

#### 2.1.4 POSIÇÃO POR PONTOS DE REFERÊNCIAS

Este método deve ser aplicado a um ambiente previamente conhecido e planejado para este fim. Neste lugar, objetos com características especiais podem ser detectados e interpretados pelos sensores e unidades de processamento do veículo. Os pontos de referências podem ser naturais ou artificiais. Os artificiais são adicionados especificamente para posicionamento. Os naturais já estão presentes no ambiente. Cada ponto de referência deve ter localização fixa. Os pontos de referência podem ter características que facilitam o reconhecimento automático do veículo, como código de barras. Os dados referentes ao posicionamento dos pontos de referência devem estar previamente incluídos no veículo. A navegação ocorre no momento em que o veículo detecta determinado ponto de referência e se localiza de acordo com a base de dados embutida (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

A principal diferença entre o *active beacon* e o posicionamento por referências é de que o veículo deve ter sensores capazes de reconhecer as referências durante o trajeto para estimar a posição como por exemplo, a detecção de um portão específico representado por um código de barras. Ao efetuar a leitura do código

durante a passagem, o veículo conhecerá sua posição já que o portão é uma referência fixa pré-carregada no seu sistema de localização.

#### 2.1.5 POSICIONAMENTO BASEADO EM MAPAS

Este modo de navegação utiliza sensores dispostos no automóvel para reconhecer locações e comparar com um mapa pré-carregado no mesmo. Outra variação deste sistema é a possibilidade de o veículo construir o mapa, conforme a análise dos sensores e o deslocamento. Geralmente, é utilizado em ambientes controlados e conhecidos (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

Segundo Borenstein et al. (1997), essa abordagem necessita de sensores complexos e caros, como radares-laser ou sonares. Além disso, estabelecer a correspondência entre o mapa criado e o mapa real não é trivial. Isso torna o uso da tecnologia restrito a laboratórios e ambientes de estudo.

### 2.2 TÉCNICAS QUE USAM MEDIÇÕES RELATIVAS

Entre as técnicas de medições absolutas são destacados navegação inercial e odometria.

#### 2.2.1 NAVEGAÇÃO INERCIAL

Essa técnica utiliza os sensores inerciais, ou seja, acelerômetros e giroscópios, como principal fonte de aquisição de dados. Segundo Yazdi (1998), um acelerômetro, geralmente é constituído por uma massa conhecida, suspensa por um conjunto de vigas alinhadas, que estão engastadas a um quadro fixo. Com base na segunda lei de Newton, o acelerômetro pode ser modelado como um sistema massa-mola-amortecedor.

A navegação inercial é autônoma, ou seja, não precisa de referências externas para o rastreamento. É necessário o conhecimento da posição e orientação iniciais. O sinal de medição dos giroscópios deve ser integrado matematicamente uma vez, para converter velocidade angular em ângulo. Já o sinal dos acelerômetros deve ser integrado matematicamente duas vezes, para assim converter o sinal de aceleração para deslocamento. Dessa forma, é realizado o posicionamento por

sensores inerciais. Contudo, esta solução de posicionamento tende a apresentar um acúmulo progressivo de erros durante o tempo, chamado de *Drift*. Assim, a navegação inercial (aplicada sozinha) tende a diminuir a exatidão com o passar do tempo, principalmente para sensores de baixo custo (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

Segundo Groves (2008), os erros associados a medições usando sensores inerciais ocorrem devido às aproximações realizadas durante as integrações matemáticas que convertem os sinais de aceleração e velocidade em deslocamento. A medida que o passo da integração aumenta, as aproximações aumentam e consequentemente os erros também. Isso pode ser reduzido diminuindo o intervalo entre iterações.

### 2.2.2 ODOMETRIA

Esta técnica consiste na conversão do movimento de rotação de uma roda ou eixo em distâncias lineares, através de sensores de rotação. A vantagem deste método é que possui boa exatidão para o custo relativamente baixo, além de permitir grandes taxas de amostragem. Este método não leva em conta possíveis escorregamentos da roda de medição, podendo gerar erros. Para obter a estimativa de posição final, é necessário integrar os dados do movimento de forma incremental, em função do tempo. Isso induz a possíveis erros que tendem a crescer conforme a distância de medição aumenta, prejudicando a precisão a longo prazo (NOURELDIN; KARAMAT; GEORGY, 2012).

Além disso, erros de orientação causam erros laterais grosseiros que crescem a medida que o veículo se desloca. O método está suscetível a erros sistemáticos e não sistemáticos. Os erros sistemáticos resultam de imperfeições do veículo ou plataforma, como diâmetros não iguais entre as rodas, medidas incorretas da bitola do eixo, rodas com deformações (ovalizadas ou tortas), entre outras. Erros não sistemáticos, ou aleatórios, resultam de efeitos externos, como perda de contato entre roda e solo, derrapagem da roda, falha de leitura do sensor, entre outros (BORENSTEIN et al., 1997).

Segundo Groves (2008), sensores de relutância variável (ou sensores indutivos) não são adequados para estimativa de posicionamento de um automóvel devido à presença de ruídos, vulnerabilidade a vibrações e interferência. Sensores



de efeito Hall permitem sinais mais fortes em todas as velocidades, porém apresentam custo mais elevado. Sensores óticos podem ser utilizados, porém são vulneráveis a sujeira.

Boucher e Noyer (2010), propõem um método para odometria diferencial que utiliza a velocidade das rodas para estimar o deslocamento espacial das mesmas. Esse método é utilizado para auxiliar a medição de GPS, para o caso de falha do sinal do satélite. A odometria pode servir como ferramenta de posicionamento auxiliar para melhora de outros sistemas de posição, através da fusão de dados. Outros autores, como Schubert, Richter e Wanielik (2008), Bonnifait et al. (2001) e Carlson, Gerdes e Powell (2002) também propõem métodos de odometria baseados na velocidade que cada roda do automóvel apresenta.

Groves (2008) salienta que os odômetros medem distâncias ao longo do chão. Considerando que a reconstrução de uma trajetória será efetuada em um plano horizontal  $xy$ , existirá um erro quando o veículo trafegar por uma superfície inclinada, aumentando a distância horizontal em relação a realidade. Para ângulos até  $8^\circ$  ( $0,14$  rad) o erro será menor que 1 %. A rotação em torno do eixo  $z$  (guinada) também será sobrestimada. Para estimativas que utilizam a velocidade, uma correção pode ser efetuada nas leituras de cada roda desde que seja conhecido o ângulo da inclinação da pista.

## 2.3 RESUMO DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O método de posicionamento mais popular utilizado atualmente é o GPS. Fica fácil listar os mais diversos equipamentos que o utilizam, tais como, smartphones, tablets, automóveis, além dos próprios aparelhos de GPS (dedicados apenas para localização). Contudo, existem situações onde o sinal de GPS não está disponível ou está fraco. Nesses casos, outras técnicas de posicionamento são aplicadas em conjunto para que o posicionamento seja afetado o mínimo possível. Pode-se citar exemplos como triangulação via redes de celular, sinais de WLAN, dados de sensores inerciais, bússolas eletrônicas, entre outros. A odometria também pode ser usada como técnica auxiliar para posicionamento automotivo, conforme mostram os estudos de Bonnifait et al. (2001), Lahrech, Boucher e Noyer (2005) e Schubert, Richter e Wanielik (2008).

Com base na importância da localização e a necessidade de se buscar um auxílio para o sistema de GPS, sem esquecer o fator complexidade/custo do sistema, este estudo utiliza a técnica de odometria para a estimativa de posicionamento de um automóvel. A ideia é estudar a viabilidade de aplicação do método como uma alternativa de baixo custo para situações onde o sinal de GPS está ausente ou ainda servir de auxílio para uma possível fusão de dados entre o sistema.

Durante as pesquisas para revisão bibliográfica e definição do tema, não foram encontrados métodos que utilizam os dados de deslocamento diretamente ao modelo. Foram encontrados apenas métodos que usam a velocidade. Procura-se propor um método que utilize sinais de deslocamento ao invés de sinais de velocidade. Isso é feito pois, o sinal de velocidade precisará ser integrado matematicamente para obtenção do valor de deslocamento. Essa integração estará sujeita a propagar os erros de aproximação, similar ao que ocorre em sensores inerciais. Dessa forma, método apresentado neste trabalho pretende utilizar a diferença de rotação das rodas traseiras de um automóvel para estimar a trajetória deste a partir de um ponto de partida conhecido, levando-se em conta dados como deslocamento de cada roda, ao invés de suas velocidades.

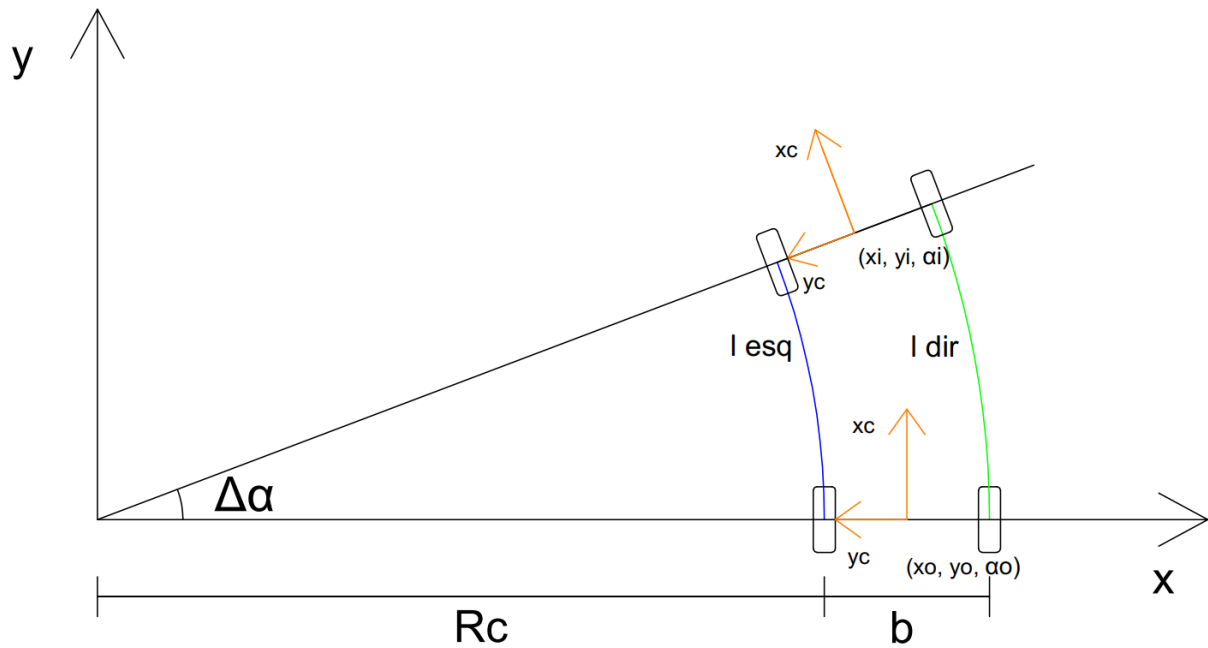
### 3 MODELO MATEMÁTICO

Para o desenvolvimento deste estudo, levou-se em consideração o princípio da diferença de rotação das rodas de um automóvel durante uma curva, no qual as rodas internas percorrem uma distância menor do que as rodas externas. Em situações onde o veículo trafega em movimento retilíneo, espera-se que todas as rodas girem na mesma velocidade angular (diâmetro de rodas iguais).

A dinâmica veicular, de uma forma geral, apresenta variáveis muito complexas, que não são consideradas neste modelo, como por exemplo a geometria das suspensões, o movimento das mesmas e a deformação dos pneus. São aplicadas condições simplificadas a fim de reduzir a complexidade do modelo, por exemplo, a suspensão traseira do automóvel fixa, que não sofre nenhum tipo de esterçamento e o raio dinâmico do pneu constante. Outra hipótese simplificadora e necessária para o funcionamento do modelo é de que não há um escorregamento entre o pneu e o solo.

O objetivo deste modelo é estimar a trajetória de um automóvel através de odometria. A leitura do posicionamento de cada roda traseira é efetuada por pulsos, no qual pontos de detecção são pré-dispostos em ângulos igualmente distribuídos ao redor das rodas. Através da leitura de pulsos estima-se o deslocamento de cada roda e realiza-se a estimativa da trajetória de trecho a trecho. A Figura 2 ilustra como ocorre a estimativa de posicionamento do veículo em relação ao espaço. O modelo atual não é considerado para aplicações em pistas inclinadas. Para pistas com essa característica, deve ser utilizado um método para calibração conforme apresentado por Groves (2008).

Figura 2 – Representação do modelo matemático.



Fonte: Autor (2018).

Na Figura 2 é apresentado o eixo traseiro de um automóvel em dois instantes distintos. O primeiro  $(x_o, y_o, \alpha_o)$  é o ponto de partida do mesmo. Após o deslocamento, o veículo chega ao segundo instante  $(x_i, y_i, \alpha_i)$ . A ideia desse modelo é estimar a posição e orientação do segundo instante conhecendo-se apenas as coordenadas do primeiro momento e o deslocamento de cada roda, representados pelas trajetórias  $l_{esq}$  para as rodas esquerda e  $l_{dir}$  para as rodas direita.

As coordenadas representadas por  $x, y$  são as coordenadas cartesianas globais do sistema,  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas locais, com origem no centro do eixo traseiro. O ângulo de rotação do automóvel durante o trajeto é representado por  $\alpha$ .

Para que seja possível estimar a trajetória completa do veículo, é necessário que o processo seja efetuado de forma iterativa, ou seja, para cálculo do próximo passo de localização é necessário utilizar os dados da localização anterior como referência até o final do percurso total. Caso o cálculo seja para o primeiro passo, é necessário utilizar os dados de posicionamento iniciais do veículo. As equações de 1 a 3 apresentam os cálculos necessários para estimar  $x_i, y_i$  e  $\alpha_i$ , respectivamente:

$$x_i = x_{i-1} + d_i \cdot \cos(\alpha_i) \quad (1)$$

$$y_i = y_{i-1} + d_i \cdot \sin(\alpha_i) \quad (2)$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \Delta\alpha_i \quad (3)$$

Onde:  $d_i$  é o deslocamento linear do veículo em metros,  $\Delta\alpha_i$  é a variação do ângulo de rotação obtida pelo diferente deslocamento de cada roda em radianos,  $x_{i-1}$  e  $y_{i-1}$  são as coordenadas do ponto de partida do automóvel ou do passo anterior para localizações intermediárias,  $\alpha_{i-1}$  é a orientação do passo anterior em radianos,  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas cartesianas do passo seguinte em metros e  $\alpha_i$  é a orientação do eixo traseiro no passo seguinte em radianos. O padrão de orientação segue a trigonometria, onde se faz um paralelo com os pontos cardeais. 0 ou  $2\pi$  radianos é equivalente a leste,  $\pi/2$  radianos é equivalente a norte,  $\pi$  radiano equivale a oeste e  $3\pi/2$  radianos equivale a sul. Contudo, isso é apenas uma analogia para ilustração, não significa que durante uma trajetória simulada ou experimental o veículo esteja necessariamente apontando ao leste real se estiver direcionado a 0 radianos.

Para realizar a estimativa de posição e orientação do automóvel, é necessário conhecer o deslocamento linear de cada roda traseira. Em uma curva, as trajetórias das rodas traseiras podem ser descobertas pelas equações 4 e 5, respectivamente:

$$l_{esq} = \Delta\alpha \cdot R_c \quad (4)$$

$$l_{dir} = \Delta\alpha \cdot (R_c + b) \quad (5)$$

Onde:  $l_{esq}$  e  $l_{dir}$  são os comprimentos lineares (em metros) das trajetórias da roda esquerda e direita, respectivamente,  $\Delta\alpha$  é o ângulo de rotação entre a posição inicial e a final do eixo traseiro em radianos,  $R_c$  é o raio da curva em metros obtido do centro da curva até o centro da roda esquerda e  $b$  é a bitola do eixo traseiro em metros.

Subtraindo-se a equação 4 da equação 5, tem-se a equação 6:

$$l_{dir} - l_{esq} = \Delta\alpha \cdot (R_c + b) - \Delta\alpha \cdot R_c \quad (6)$$

Realizando as devidas simplificações e isolando  $\alpha$ , tem-se a equação 7:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta l}{b} \quad (7)$$

Onde:  $\Delta l$  é a diferença dos comprimentos das trajetórias  $l_{dir}$  e  $l_{esq}$ ,  $\Delta\alpha$  é a diferença de ângulo obtida através dos diferentes deslocamentos de cada roda traseira em radianos.

O deslocamento do veículo pode ser encontrado através da média dos comprimentos das trajetórias, conforme a equação 8:

$$d = \frac{l_{dir} + l_{esq}}{2} \quad (8)$$

Onde:  $d$  é o deslocamento linear do automóvel em metros.

A medida das trajetórias  $l_{dir}$  e  $l_{esq}$  precisam ser descobertas para a realização da estimativa de posicionamento através deste método. O deslocamento linear de cada roda pode ser calculado pela equação 9:

$$l_r = r \cdot \theta_r \quad (9)$$

Onde:  $l_r$  é o deslocamento linear da roda em metros,  $r$  é o raio da roda em metros e  $\theta_r$  é o ângulo de rotação da roda em radianos.

São aplicados ímãs igualmente distribuídos em termos de ângulo, ao redor da circunferência de cada roda. O ângulo de rotação das rodas traseiras pode ser descoberto com a leitura dos pontos de detecção pelo sensor. A cada ponto de leitura será gerado um pulso. A equação 10 apresenta a relação entre o ângulo de rotação e o número de pontos de detecção em uma roda:

$$\theta_r = \frac{2\pi}{n} \cdot P \quad (10)$$

Onde:  $n$  é o número de pontos de detecção de cada roda e  $P$  é o número de pulsos lidos por cada sensor (um por roda traseira).

As equações 11 e 12 apresentam os deslocamentos lineares das rodas esquerda e direita, em função do número de pulsos detectado para cada uma:

$$l_{esq} = r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{esq} \quad (11)$$

$$l_{dir} = r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{dir} \quad (12)$$

Onde:  $P_{esq}$  é o número de pulsos detectados na roda esquerda e  $P_{dir}$  é o número de pulsos vistos na roda direita.

Introduzindo as equações 11 e 12 nas equações 7 e 8 têm-se os valores de  $\Delta\alpha$  e  $d$  em função dos números de pulsos detectados nas rodas, apresentados nas equações 13 e 14, respectivamente:

$$\Delta\alpha = \frac{r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{dir} - r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{esq}}{b} \quad (13)$$

$$d = \frac{r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{dir} + r \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot P_{esq}}{2} \quad (14)$$

Aplicando as equações 13 e 14 nas equações 1, 2 e 3 tem-se a formulação geral desse modelo matemático, apresentados nas equações 15, 16 e 17:

$$x_i = x_{i-1} + \frac{r\pi}{n} \cdot (P_{dir} + P_{esq}) \cdot \cos(\alpha_i) \quad (15)$$

$$y_i = y_{i-1} + \frac{r\pi}{n} \cdot (P_{dir} + P_{esq}) \cdot \sin(\alpha_i) \quad (16)$$

$$\alpha_i = \alpha_{i-1} + \frac{2r\pi}{nb} \cdot (P_{dir} + P_{esq}) \quad (17)$$

Dessa forma, o procedimento para estimativa de posicionamento e reconstrução da trajetória é realizado através da seguinte ordem:

Primeiramente, deve-se conhecer as coordenadas cartesianas  $x_o$  e  $y_o$  (iniciais) e o ângulo formado entre a frente do veículo ( $x_c$ ) e a coordenada global  $x$ , no caso  $\alpha_o$ . Após isso, apenas com a leitura dos pulsos em determinado tempo é possível calcular e reconstruir a trajetória de um automóvel de trecho em trecho, já

que os parâmetros físicos do modelo são invariáveis (bitola e raio da roda). Lembre-se que para a próxima iteração, deve-se levar em conta as últimas coordenadas conhecidas e angulação em relação ao eixo  $x$  ( $x_{i-1}$ ,  $y_{i-1}$ ,  $\alpha_{i-1}$ ).

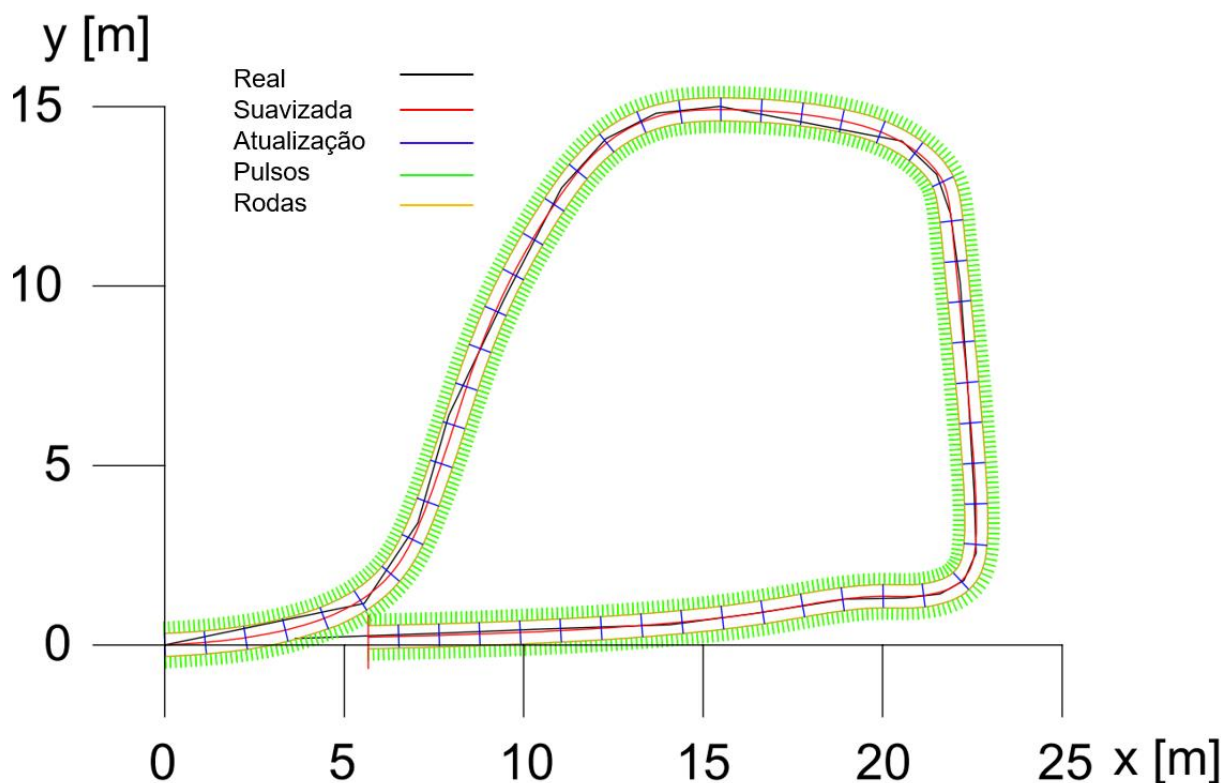


## 4 SIMULAÇÃO

A simulação tem o intuito de avaliar a consistência do modelo matemático proposto nesse estudo. Contudo, para que a avaliação seja válida, faz-se necessária uma referência real. A trajetória real, obtida através das medições com a estação total é a referência para todo estudo. O Método usado para obtenção da trajetória real é detalhado no item 5.

Com auxílio de software CAD (*Computer Aided Design*), criou-se uma suavização da trajetória real através de curvas, já que a mesma é composta por retas que ligam os pontos captados pela estação total e não representam bem a trajetória percorrida por uma roda. Com a criação da trajetória suavizada, a trajetória de cada roda traseira é desenvolvida com um deslocamento da metade da bitola do eixo traseiro para cada lado. Definidas as trajetórias de cada roda, foram efetuados os espaçamentos entre as leituras dos sensores. Definiu-se o critério para atualização das iterações uma distância equivalente a uma volta completa na trajetória central (contagem média de pulsos das rodas traseiras igual a 8). O resultado é apresentado na Figura 3.

Figura 3 – Ilustração da simulação.

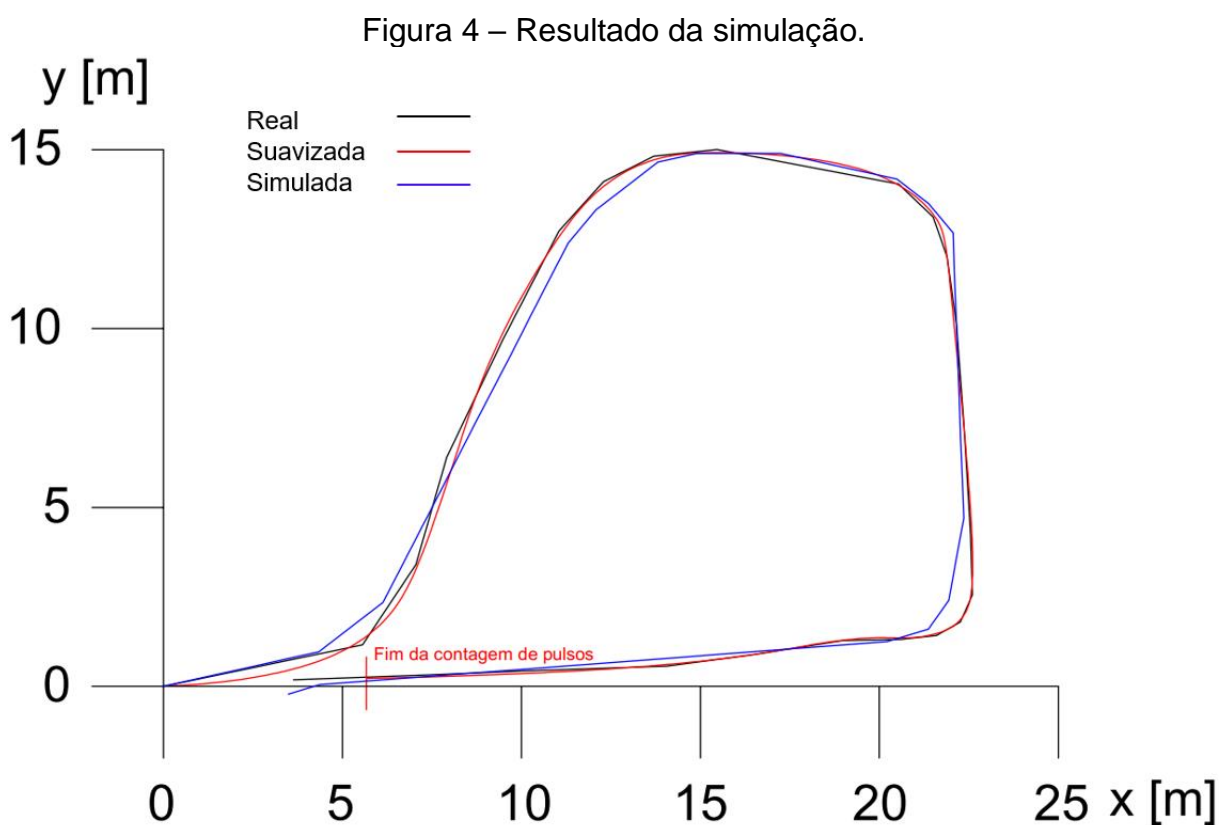


Fonte: Autor (2018).

Na Figura 3, a linha em preto representa a trajetória real, obtida com a estação total. A trajetória em vermelho é a suavização do trajeto real e as linhas de cor laranja são as trajetórias de cada roda traseira. Os traços verdes representam as distâncias em que ocorrem cada pulso. As linhas transversais azuis delimitam os trechos em que serão efetuadas as contagens dos pulsos. Vale frisar que a contagem de pulsos se encerra um pouco antes da sobreposição da trajetória real, delimitada pela linha vertical vermelha. Isso se dá pelo fato de simplificar a contagem manual dos pulsos, já que as linhas sobrepostas prejudicariam a visualização das linhas verdes que indicam a distância entre os pulsos. Após a contagem dos pulsos, os valores são adicionados ao algoritmo do modelo matemático (APÊNDICE C) para cálculo da trajetória simulada. O algoritmo gera as coordenadas  $x$  e  $y$  que são importadas no *AutoCAD®*, permitindo a visualização da trajetória.

#### 4.1 RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

Com a execução da simulação, foi obtida a trajetória apresentada na Figura 4. O início da trajetória acontece na origem do plano cartesiano, onde a linha preta representa o trajeto real, a linha azul é a trajetória calculada pelo modelo proposto e a linha vermelha representa a curva suavizada (baseada na trajetória real).



Fonte: Autor (2018).

Pela comparação das trajetórias, é possível notar que a trajetória simulada (azul) se mantém próxima da trajetória suavizada (vermelha). A máxima distância entre uma e outra foi de 0,6 m ao longo do percurso. Ainda que ambas não tenham ficado sobrepostas (ideal), tal proximidade é bastante positiva.

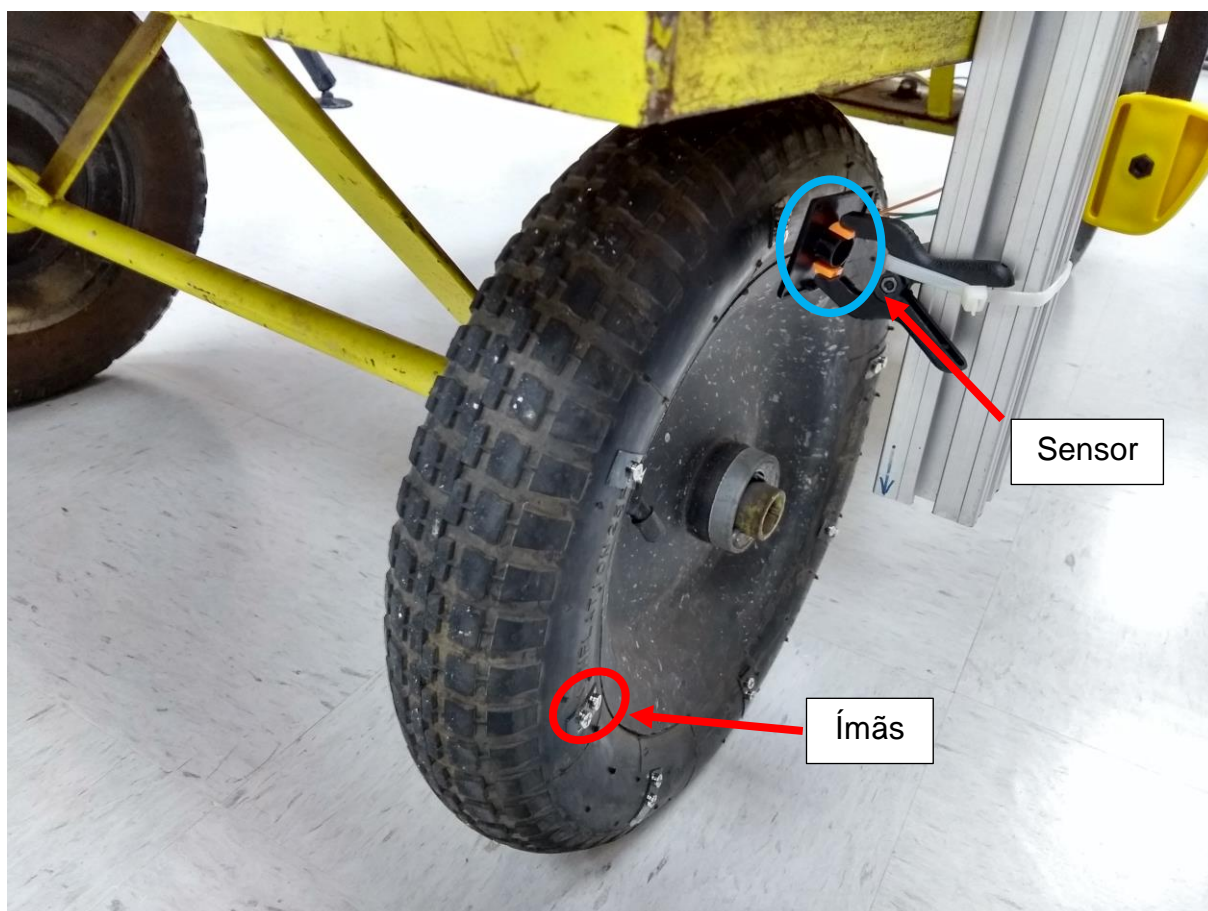
Contudo, o comprimento das trajetórias real e simulada diferiu em 1,21 m. São 58,47 m para a trajetória suavizada enquanto para a trajetória simulada 59,68 m. O número de pulsos para todo trajeto simulado foram de 399 para roda direita e 409 para roda esquerda.

## 5 EXPERIMENTO

Para a realização do experimento, utilizou-se um modelo simplificado de veículo: uma plataforma de carga com quatro rodas movida por tração humana. Essa plataforma foi escolhida por ter algumas vantagens, como a disponibilidade, praticidade para instalação da instrumentação, possibilidade da realização de teste em ambiente fechado e o fácil manuseio. Como o modelo matemático leva em conta a rotação das rodas traseiras, os principais requisitos para utilização da plataforma foram: rodas traseiras simétricas e paralelas entre si, rotação independente e eixo traseiro fixo (não esterçante). Todos os requisitos foram cumpridos nesse experimento.

Cada roda traseira possui oito pontos de detecção (ímãs) e um sensor. O sensor utilizado é do modelo KY-003, que funciona como uma chave. Ao detectar a presença de um campo magnético (quando o ímã está próximo), o mesmo varia a tensão interna de 5V (*high*) para 0V (*low*) e depois retorna para 5V assim que a influência do campo magnético termina. No momento em que ocorre a mudança da tensão de *high* para *low* ocorre um pulso, assim, é possível realizar a contagem para estimativa de deslocamento das rodas. A Figura 5 mostra a roda traseira da plataforma com os ímãs (circulado de vermelho) e o sensor (circulado de azul) posicionados.

Figura 5 – Roda traseira com instrumentação posicionada.



Fonte: Autor (2018).

A contagem dos pulsos gerados pelos sensores é realizada pela placa de prototipagem eletrônica *Arduino®*. A placa foi escolhida principalmente pelos seguintes requisitos: disponibilidade, alta modularidade, alta compatibilidade com sensores e outros dispositivos, facilidade de utilização e baixo custo de aplicação.

A placa *Arduino®* é alimentada pela porta USB (*Universal Serial Bus*) do computador. É no computador que são armazenados a contagem dos pulsos, bem como o instante em que cada um ocorreu. Para isso, utilizou-se o software de código aberto *CoolTerm®*, que extrai os dados diretamente do *Arduino®* e grava em um arquivo de texto com o horário de cada detecção. A leitura do arquivo de texto e tratamento dos pulsos obtidos é executada através do software *Excel®*. Para realização dos cálculos apresentados no modelo matemático, utilizou-se um algoritmo escrito no software *Matlab®*, assim os dados tratados no *Excel®* são importados ao algoritmo que tem como saída as coordenadas  $x$  e  $y$  da trajetória

percorrida pelo veículo. Por fim, esses dados são exportados para o software *AutoCAD®* e cria-se a representação gráfica da trajetória.

A trajetória real foi definida com o movimento do protótipo de teste. Durante a primeira volta fazendo a leitura das rodas, foram feitas demarcações no piso coincidindo com o centro do eixo traseiro (referência do protótipo). A Figura 6 apresenta o ponto de referência do protótipo e a demarcação no piso.

Figura 6 – Demarcação do piso e realização do experimento.



Fonte: Autor (2018).

Posteriormente, esses pontos demarcados foram medidos com auxílio de uma estação total robotizada e essa se tornou a referência do estudo. O experimento foi realizado no hall principal do Centro Tecnológico de Joinville da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). A Figura 7 demonstra a medição das marcações do chão com a estação total.



Figura 7 – Medição para obtenção da trajetória real.



Fonte: Autor (2018).

Para contagem dos pulsos de cada roda, foram desenvolvidos dois algoritmos diferentes. O primeiro faz a contagem de pulsos no momento em que o ímã passa perto do sensor. Contudo, como o *Arduino*® apresenta uma velocidade de leitura elevada, pode ocorrer a contagem de mais de um pulso para a mesma passagem do ímã, assim utilizou-se uma função para desconsiderar leituras em um determinado intervalo de tempo. Espera-se então que o microcontrolador conte apenas um pulso por passagem do ímã. O segundo tipo de algoritmo utilizou função condicional para realizar a contagem simples, de forma que o mesmo sensor somente irá realizar o incremento no instante que o ímã se afastar e o mesmo mudar seu estado de tensão de *low* para *high* novamente. Com esse segundo algoritmo espera-se que o microcontrolador realize a contagem após o afastamento do ímã da contagem anterior, com a aproximação do segundo ímã. O primeiro código encontra-se no Apêndice A e o segundo no Apêndice B. A ideia de se utilizar uma contagem de pulsos serve para obtenção direta dos valores de deslocamento. Poderia se utilizar a

medição de tempo entre um pulso e outro, contudo, essa abordagem resultaria na velocidade de cada roda. Utilizando-se a velocidade, existe a necessidade da integração numérica para transformação em deslocamento. Isso gerará erros de aproximação que tendem a crescer à medida que o deslocamento aumenta. Como o interesse é o deslocamento de cada roda individualmente, o número de ímãs foi definido de acordo com os recursos disponíveis e possibilidade de adaptação. Considerou-se que o maior número de ímãs possibilita maior resolução do modelo experimental, ou seja, capacidade de detectar curvas mais suaves. A disposição de 8 ímãs ao redor de uma circunferência resulta em espaçamento de  $45^\circ$  ao redor da circunferência da roda.



## 5.1 RESULTADO DO EXPERIMENTO

A análise dos resultados obtidos inicia-se com o comparativo de pulsos contados em cada variação do experimento e a simulação. Devido ao resultado positivo da simulação, a mesma é tomada como referência nesse caso. Apesar de não ser exatamente a mesma trajetória que foi realizada no experimento, uma vez que como a plataforma de teste não se move sobre trilhos. A Tabela 1, apresenta o número de pulsos contados em cada variação do experimento.

Tabela 1 – Lista de pulsos por variação do experimento.

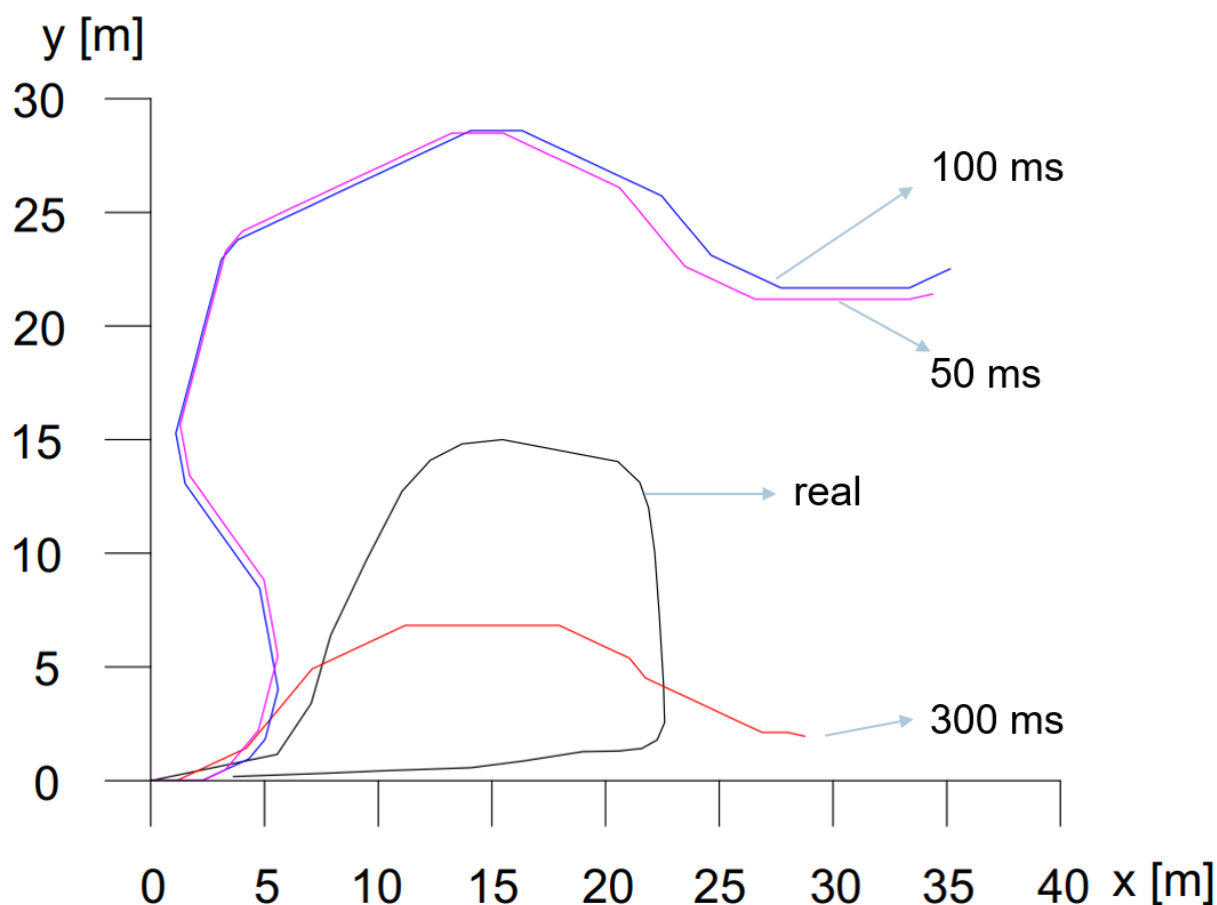
	Nº Pulsos Direita	Nº Pulsos Esquerda
Simulação	399	409
Intervalo 300 ms	229	230
Intervalo 100 ms	455	453
Intervalo 50 ms	448	447
Sem repetição de leitura	101	105

Fonte: Autor (2018).

A Tabela 1 mostra que a medição com o algoritmo que não permite a repetição de leitura apresentou uma contagem de pulsos muito inferior ao que foi obtido na simulação. Apesar de a leitura ser única a cada passagem do ímã, o código apresentou velocidade de leitura muito baixa e falha. Dentre outras variações do experimento, as medições com o algoritmo que não permite leituras duplicadas em intervalo de 100 e 50 ms foram as que ficaram próximas da simulação. A medição com o algoritmo de 300 ms apresentou, aproximadamente, a metade dos pulsos esperados, o que indica que boa parte foi perdida durante a coleta dos dados.

Na Figura 8 são mostradas as trajetórias obtidas nos experimentos com intervalo de tempo. O resultado utilizando o algoritmo sem repetição de leitura foi omitido, pois os dados ficaram inconsistentes. A contagem de pulsos usando o intervalo de 300 ms apresentou uma trajetória menor que o esperado, decorrente do número insuficiente de pulsos, e está representada pela linha de cor vermelha. As linhas de cor rosa e azul são para os intervalos de leitura de 50 e 100 ms, respectivamente.

Figura 8 – Trajetórias obtidas com o experimento.



Fonte: Autor (2018).

Com relação ao comprimento das trajetórias, as de 50 ms e 100 ms condizem com o esperado quando comparadas a trajetória real. A trajetória real apresenta 64,17 m quando fechada até o ponto de saída (0,0). A trajetória de 50 ms tem 63,21 m e a trajetória de 100 ms tem 64,12 m. Entretanto, esperava-se uma trajetória próxima da trajetória real. Entretanto, o que se observou foram trajetórias parecidas entre si, para 100 e 50 ms e diferentes do real. As trajetórias do experimento tiveram uma tendência a desviarem para esquerda. Esse comportamento pode ser previsto pela análise de pulsos da Tabela 1, já que na simulação os pulsos da roda esquerda ficaram próximos dos pulsos da roda direita. Esperava-se em torno de 10 pulsos a mais para a roda esquerda. Para as trajetórias de 100 e 50 ms, aconteceu justamente o contrário.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a realização da simulação, através do auxílio de sistemas CAD, foi possível notar que a aplicação do modelo matemático é viável. Em uma primeira análise, sua aplicação pôde reconstruir uma trajetória de um automóvel. No entanto, a aplicação experimental não obteve o mesmo sucesso quando comparada com a simulação. As trajetórias não ficaram próximas da referência real, evidenciando que este método pode apresentar dificuldade na aplicação prática.

O ponto positivo é que, entre si, uma medição e outra (50 e 100 ms) ficaram próximas. Isso significa que, possivelmente, os erros de trajetória estão ocorrendo de maneira sistemática. Este estilo de medição incremental, onde uma medida depende de outra anterior, tende a propagar os possíveis erros e incertezas de medição. Portanto, para que seja viável, a aplicação real requer equipamentos confiáveis em termos de sensores, tolerâncias e instrumentação em geral.

Com a realização do experimento prático, observou-se também a possibilidade de melhorias no modelo experimental em estudos futuros. Os algoritmos podem ser melhorados para aplicação com o *Arduino*®. O uso de um sistema que consiga ler os sensores e realizar os cálculos de maneira simultânea e rápida o suficiente para gerar a trajetória em tempo real é outra possível melhoria. Um método para calibração do posicionamento dos ímãs pode ser implementado em futuras aplicações, para reduzir possíveis erros de construção do modelo experimental. É interessante também a construção de suporte para os ímãs por usinagem ou impressão 3d. Assim, é possível minimizar as incertezas em relação aos ângulos dos ímãs e possivelmente melhorar a reconstrução das trajetórias. A utilização dos sensores do ABS (*Antilock Braking System*), é uma sugestão para o caso de uma aplicação em escala real.

Outras variantes desse método podem ser questionadas, como o uso do ângulo de esterçamento das rodas dianteiras e velocidade de deslocamento do automóvel. Entretanto, como os pneus são deformáveis e não apresentam comportamento linear, o ângulo da trajetória estimada pode variar de acordo com o ângulo da direção e a velocidade do veículo (PACEJKA, 2006). Assim, o modelo torna-se muito mais complexo.

## REFERÊNCIAS

- BONNIFAIT, Philippe et al. Data fusion of four ABS sensors and GPS for an enhanced localization of car-like vehicles. **ICRA**. 2001. p. 1597-1602.
- BORENSTEIN, Johann et al. Mobile robot positioning: Sensors and techniques. **Journal of robotic systems**, v. 14, n. 4, p. 231-249, 1997.
- BOUCHER, Christophe; NOYER, Jean-Charles. A hybrid particle approach for GNSS applications with partial GPS outages. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 59, n. 3, p. 498-505, 2010.
- CARLSON, Christopher R.; GERDES, J. Christian; POWELL, J. David. Practical position and yaw rate estimation with GPS and differential wheelspeeds. **Proceedings of AVEC 6th International Symposium**. 2002.
- GONÇALVES, Diogo Aristóteles Rodrigues; BORGES, Renata Maria de Almeida e. Utilização de aplicativos móveis no ensino da Topografia. **Evidência**, Araxá, v. 12, n. 12, p.147-158, 2016. Disponível em: <<http://www.uniaraxa.edu.br/ojs/index.php/evidencia/article/download/503/482>>. Acesso em: 01 jun. 2018.
- GROVES, Paul D. **Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems**. Artech house, 2008.
- LAHRECH, A.; BOUCHER, C.; NOYER, J.-C. Accurate vehicle positioning in urban areas. **Industrial Electronics Society, 2005. IECON 2005. 31st Annual Conference of IEEE**. IEEE, 2005. p. 5 pp.
- NOURELDIN, Aboelmagd; KARAMAT, Tashfeen B.; GEORGY, Jacques. Introduction. **Fundamentals Of Inertial Navigation, Satellite-based Positioning And Their Integration**, [s.l.], p.1-20, 26 out. 2012. Springer Berlin Heidelberg. [http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30466-8\\_1](http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-30466-8_1).
- PACEJKA, Hans B. **Tyre and Vehicle Dynamics**. 2. ed. Burlington: Butterworth-Heinemann, 2006.
- SCHUBERT, Robin; RICHTER, Eric; WANIELIK, Gerd. Comparison and evaluation of advanced motion models for vehicle tracking. **Information Fusion, 2008 11th International Conference on**. IEEE, 2008. p. 1-6.
- YAZDI, N.; AYAZI, F.; NAJAFI, K. Micromachined inertial sensors. **Proceedings of the IEEE**, v. 86, n. 8, p. 1640–1658, 1998.

## APÊNDICE A – Código de leitura com intervalo.

```

const int pinoVerde = 12;
const int pinoAzul = 8;
int countVerde = 0;
int countAzul = 0;
int estadoVerde = HIGH;
int estadoAzul = HIGH;
int estadoVerdeAnterior = 0;
int estadoAzulAnterior = 0;
unsigned long eventoVerdeAnterior;
unsigned long eventoAzulAnterior;
unsigned long intervalo = 50;

void setup() {
  // put your setup code here, to run once;;
  pinMode (pinoVerde, INPUT);
  pinMode (pinoAzul, INPUT);
  Serial.begin(9600);
  while(!Serial){
    ;
  }
}

void loop() {
  estadoVerde = digitalRead(pinoVerde);
  estadoAzul = digitalRead(pinoAzul);

  if(estadoVerde != estadoVerdeAnterior); {
    if (estadoVerde == LOW && millis() - eventoVerdeAnterior > intervalo)
    {
      eventoVerdeAnterior = millis();
      countVerde++;
      Serial.print(countVerde);
      Serial.print(",");
      Serial.println("0");
    }
  }
  if(estadoAzul != estadoAzulAnterior); {
    if (estadoAzul == LOW&& millis() - eventoAzulAnterior > intervalo)
    {
      eventoAzulAnterior = millis();
      countAzul++;
      Serial.print("0");
      Serial.print(",");
      Serial.println(countAzul);
    }
  }
}

```

## APÊNDICE B – Código de leitura sem repetição.

```

const int pinoVerde = 12;
const int pinoAzul = 8;
int countVerde = 0;
int countAzul = 0;

void setup() {
  // put your setup code here, to run once:
  pinMode (pinoVerde, INPUT);
  pinMode (pinoAzul, INPUT);
  Serial.begin(9600);
  while(!Serial){
    ;
  }
}

void loop() {
  boolean estadoVerdeAnterior = LOW;
  boolean estadoAzulAnterior = LOW;

  if (digitalRead(pinoVerde) == HIGH)
  {
    estadoVerdeAnterior = HIGH;

    if (digitalRead(pinoVerde) == LOW && estadoVerdeAnterior == HIGH)
    {
      estadoVerdeAnterior = LOW;
      countVerde++;
      Serial.print(countVerde);
      Serial.print(",");
      Serial.println("0");
    }
  }
  if (digitalRead(pinoAzul) == HIGH)
  {
    estadoAzulAnterior = HIGH;

    if (digitalRead(pinoAzul) == LOW && estadoAzulAnterior == HIGH)
    {
      estadoAzulAnterior = LOW;
      countAzul++;
      Serial.print("0");
      Serial.print(",");
      Serial.println(countAzul);
    }
  }
}

```

## APÊNDICE C – Algoritmo do modelo matemático.

```

clc
clear all

b = 1.384;
r = 0.2888;
nIma = 8;

pDir = [8,8,8,8,8,7,7,8,7,7,7,8,8,8,7,7,7,7,7,8,8,3];
pEsq = [8,8,8,8,8,8,9,8,9,9,9,8,8,8,9,9,9,9,9,8,8,3];

theta = 2*pi/nIma;

X = [];
Y = [];
alpha = [];
d=[];
deltaAlpha = [];

X(1) = 0;
Y(1) = 0;
alpha(1) = 0;
deltaAlpha(1)=0;
d(1) = 0;

nElem = length(pDir);
i = 1;
while i <= nElem;
    deltaAlpha(i+1) = ((r*theta*pDir(i))-(r*theta*pEsq(i)))/b;
    d(i+1) = ((r*theta*pDir(i))+(r*theta*pEsq(i)))/2;

    alpha(i+1) = alpha(i)+deltaAlpha(i+1);
    X(i+1) = X(i)+d(i+1)*cos(alpha(i+1));
    Y(i+1) = Y(i)+d(i+1)*sin(alpha(i+1));
    i = i+1;
end
plot(X,Y);
A = [X;Y];
fileID = fopen('pontos_X_Y.txt','w');
fprintf(fileID,'X','Y');
fprintf(fileID,'%6.2f %12.8f\r\n',A);
fclose(fileID);
% '%6s %12s\r\n'

```